УДК 539.171, 539.144

ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ МНОГОКРАТНЫХ ВНУТРЕННИХ ОТРАЖЕНИЙ ПРИ ОПИСАНИИ ТУННЕЛИРОВАНИЯ ЧЕРЕЗ БАРЬЕР

В.С. Ольховский, С.П. Майданюк

Рассмотрена задача рассеяния нерелятивистской частицы на ядре, потенциал взаимодействия между которыми имеет сферически-симметричный вид. В качестве дальнейшего развития временного анализа процессов туннелирования представлен нестационарный метод решения задачи, благодаря которому можно описать в зависимости от времени распространение (туннелирование) частицы и детально изучить этот процесс в интересующий момент времени или относительно конкретной точки пространства. При определении временных характеристик метод показал себя достаточно простым и удобным. При определении выражений для стационарных волновых функций для задач с потенциалом взаимодействия, радиальная часть которого имеет более сложный вид, чем прямоугольный, этот метод является более эффективным, чем стандартные стационарные подходы.

В качестве дальнейшего развития временного анализа процессов туннелирования, представленного в [1, 2], мы представляем нестационарный метод решения задачи туннелирования нерелятивистской частицы через барьер, использующий многократные внутренние отражения потоков относительно границ барьера.

Важной особенностью метода является описание туннелирования (распространения) частицы с помощью нестационарных волновых пакетов (в. п.), т.е. рассматриваем процесс тунелирования как существенно нестационарный. Благодаря этому становится возможным корректно определить в области барьера пакеты, выполнить временной анализ туннелирования частицы и детально изучить этот процесс в интересующий момент времени или относительно конкретной точки пространства. При определении временных характеристик туннелирования этот метод показал себя достаточно простым и эффективным. Ранее этот метод применялся лишь в стационарных одномерных задачах [3 – 5].

Рассмотрим вначале одномерную задачу туннелирования частицы через прямоугольный барьер. При стационарном рассмотрении процесс туннелирования можно описать с помощью волновых функций (в. ф.) вида

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{ikx}+A_R e^{-ikx}, & x<0 \quad (область\_I); \\ \alpha e^{\xi x}+\beta e^{-\xi x}, & 0<x<a \quad (область\_II); \\ A_T e^{ikx}, & x>a \quad (область\_III). \end{cases} \tag{1}$$

Согласно методу, туннелирование частицы по барьеру можно описать на основе в. п. последовательно по этапам его прохождения относительно каждой границы. Вначале на первом этапе рассмотрим частицу, падающую на первую границу барьера в точке x = 0. Она с некоторой вероятностью отразится от границы и с некоторой вероятностью пройдет через нее, туннелируя далее. Этот процесс можно описать с помощью в. п. вида

$$\Psi_i(x,t)=\int_0^{+\infty} g(E-\overline{E})\varphi_i(x,k)e^{-iEt/\hbar}dE, \tag{2}$$

где $\overline{E}$ – средняя энергия частицы и

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{ikx}+A_R^0 e^{-ikx}, & x<0; \\ \beta^0 e^{-\iota x}, & 0<x<a. \end{cases} \tag{3}$$

Нормировочные коэффициенты A_R^0 и β^0 можно найти из условий непрерывности в. ф. и ее производной в точке x = 0.

На втором этапе рассматриваем частицу, туннелирующую по области II и падающую на вторую границу барьера в точке x = a. Она с некоторой вероятностью проходит и с некоторой вероятностью отражается от этой границы. Этот процесс можно описать с помощью в. п. (2), где следует взять стационарные в. ф.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha^0 e^{\varsigma x} + \beta^0 e^{-\varsigma x}, & 0 < x < 0; \\ A_T^0 e^{ikx}, & x > a. \end{cases} \tag{4}$$

Нормировочные коэффициенты α^0 и A_T^0 можно найти из условий непрерывности в. ф. и ее производной в точке x = a.

Следует отметить еще третий этап, когда частица, отраженная от второй границы барьера, туннелирует по области II обратно, падая на первую границу барьера в точке x = 0. Она с некоторой вероятностью проходит и с некоторой вероятностью отражается от этой границы. Этот процесс можно описать с помощью в. п. (2), где следует взять стационарные в. ф.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha^0 e^{\varsigma x} + \beta^1 e^{-\varsigma x}, & 0 < x < 0; \\ A_R^1 e^{-ikx}, & x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Нормировочные коэффициенты β^1 и A_R^1 можно найти из условий непрерывности в. ф. и ее производной в точке x = 0.

Рассматривая процесс распространения (или туннелирования) частицы таким образом далее, приходим к выводу, что любой процесс прохождения и отражения частицы можно свести к одному из рассмотренных выше. Для нормировочных коэффициентов можно составить реккурентные соотношения.

Далее определяем прохождение и отражение частицы относительно барьера на основе суммарных прошедшего и отраженного в. п. вида

$$\begin{aligned} \Psi_{tun}(x,t) &= \int g(E-\overline{E}) \sum A_T^i e^{ikx - iEt/\hbar} dE, \quad x > a; \\ \Psi_{ref}(x,t) &= \int g(E-\overline{E}) \sum A_R^i e^{ikx - iEt/\hbar} dE, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом суммы коэффициентов A_T^i и A_R^i можно вычислить на основе найденных выше реккурентных соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{i=0} A_T^i &= \frac{i4k\xi e^{-\xi a - ika}}{F_{sub}}; \quad F_{sub} = (k^2 - \xi^2) D_- + 2ik\xi D_+; \\ \sum_{i=0} A_R^i &= \frac{i4k\xi e^{-\xi a - ika}}{F_{sub}}; \qquad D_\pm = 1 \pm e^{-2\xi a}. \end{aligned} \tag{7}$$

Метод, исследованный на одномерной задаче, теперь применим к задаче рассеяния частицы на сферически-симметричном поле, радиальная компонента которого имеет барьер. С помощью его можно получить выражения для стационарных в. ф. для времен туннелирования и отражения частицы относительно барьера при условии, что известны общие решения для стационарной в. ф. на всей области ее определения (без знания нормировочных коэффициентов). В качестве примера приведем решения для задачи с прямоугольным барьером при моменте l = 0.

Пусть в. ф. имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\chi(r)}{r}; \quad \chi(r) = \begin{cases} e^{-ikr} + Se^{ikr}; & r > R_2; \\ \alpha e^{\xi r} + \beta e^{-\xi r}; & R_1 < r < R_2; \\ A(e^{-ik_1 r} - e^{ik_1 r}); & r < R_1. \end{cases} \tag{8}$$

Падающий, прошедший и отраженный в. п. относительно барьера, описывающие частицу, определим с помощью (2)

$$S_{tun} = \sum_{i=1}^{+\infty} S^i = \frac{i4k\xi \left(\frac{i\xi - k_1}{i\xi + k_1} - e^{2ik_1 R_1} \right) e^{-2\xi(R_2 - R_1) - 2ikR_2}}{(k + i\xi)^2 F_{sub}}; \tag{9}$$
$$S_{ref} = S^0 = \frac{k - i\xi}{k + i\xi} e^{-2ikR_2};$$

$$F_{sub} = 1 + \frac{k_1 - i\xi}{k_1 + i\xi} e^{2ik_1 R_1} - \frac{(k - i\xi)(k_1 - i\xi)}{(k + i\xi)(k_1 + i\xi)} e^{-2\xi(R_2 - R_1)} - \frac{k - i\xi}{k + i\xi} e^{-2\xi(R_2 - R_1) + 2ik_1 R_1}.$$

Фазовые времена туннелирования и отражения частицы относительно барьера можно найти с помощью метода стационарной фазы [1, 2]

$$\tau_{tun} = \hbar \frac{\partial}{\partial E} \arg \frac{i\xi - k_1 - (i\xi + k_1)e^{2ik_1 R_1}}{(k + i\xi)^2 (k_1 + i\xi) F_{sub}}; \tag{10}$$
$$\tau_{ref} = \frac{2m}{\hbar k \xi}.$$

При применении метода к сферически-симметричной задаче получено свойство

$$S = S_{tun} + S_{ref.} \tag{11}$$

где компоненты S_{tun}, S_{ref} соответствуют рассеянию через стадию образования составного ядра и упругому рассеянию.

В заключение отметим, что возможность временного описания туннелирования через барьер является одной из главных перспектив метода по сравнению со стационарными подходами. Такое описание туннелирования частицы будет более наглядным и полным. На его основе можно вычислить те стационарные характеристики, для определения которых необходимо выполнять анализ движения частицы (например, компоненты S_{tr} и S_{ref}). С другой стороны, метод позволяет изучить процесс туннелирования частицы относительно определенного момента времени или точки пространства более детально по сравнению с известными стационарными подходами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olkhovsky V.S., Recami E.* // Phys. Rep. – 1992. – Vol. 214. – P. 339.
2. *Cardone, R. Mignani, V.S. Olkhovsky* // J. Phys. I France. – 1997. – Vol. 7. – P. 1211.

3. *Fermor* // Am. J. Phys. – 1966. – Vol. 34. – P. 1168.
4. *McVoy K. W., Heller L., Bolsterli M.* // Rep. Mod. Phys. – 1967. – Vol. 39. – P. 245.
5. *Anderson A.* // Am. J. Phys. – 1989. – Vol. 57. – P. 230.

ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ БАГАТОКРАТНИХ ВНУТРІШНІХ ВІДБИТТІВ ПРИ ОПИСІ ТУНЕЛЮВАННЯ ЧЕРЕЗ БАР'ЄР

В.С. Ольховський, С.П. Майданюк

Представлено задачу розсіювання нерелятивістської частинки на ядрі, потенціал взаємодії між якими має сферично-симетричний вигляд. В якості подальшого розвитку часового аналізу процесів тунелювання подано нестаціонарний метод рішення задачі, завдяки якому стає можливим описати залежно від часу поширення (тунелювання) частинки і детально вивчити цей процес у необхідний момент часу або щодо конкретної точки простору. При визначенні часових характеристик метод показав себе досить простим і зручним. При визначенні виразів для стаціонарних хвильових функцій для задач з потенціалом взаємодії, радіальна частина якого має більш складний вигляд, ніж прямокутний, цей метод є більш ефективним, ніж стандартні стаціонарні підходи.

THE TIME ANALYSIS OF MULTIPLE INTERNAL REFLECTIONS IN TUNNELING DESCRIPTION THROUGH THE BARRIER

V.S. Olkhovsky, S.P. Maidanyuk

The problem of scattering of a nonrelativistic particle on a nucleus is considered, the interaction potential between which has a spherically symmetrical view. As the further development of the time analysis of processes of tunneling the non-stationary method of the solution of a problem is represented, due to which begins the possibility to describe in a time dependence the propagation (tunneling) of a particle and in details to study this process in an interesting instant or concerning a concrete point of space. At calculating the time parameters the method has shown itself simple and convenient. At finding the expressions for stationary wave functions for problems with an interaction potential, which radial part has more composite view than rectangular, this method is more effective than reference stationary approaches.