

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАКТОРА НА ВОЛНЕ ЯДЕРНОГО ГОРЕНИЯ. I**

**В. Н. Павлович<sup>1</sup>, В. Н. Хотяинцев<sup>2</sup>, Е. Н. Хотяинцева<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев*

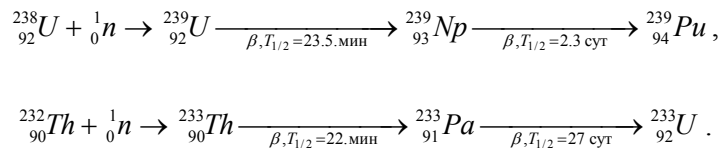
<sup>2</sup>*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев*

Прояснение физики процессов, определяющих стационарную волну ядерного горения, и нахождение эффективных теоретических подходов для определения ее параметров является целью настоящей работы. Показано, что для описания стационарных и нестационарных процессов в волне ядерного горения можно использовать уравнение диффузии для флюэнса, а эволюцию системы при прохождении стационарной волны удобно представлять как движение по координате флюэнса  $\psi$  от нулевого начального до некоторого конечного значения  $\psi_f$ . Впервые сформулированы общие балансные условия интегрального характера, определяющие стационарную волну как самосогласованный пространственно-временной процесс. Таких условий два. Первое является условием равенства полного числа нейтронов, генерируемых и поглощаемых при прохождении волны, а второе – условием совпадения “центров тяжести” распределений генерации и поглощения нейтронов по координате флюэнса. В совокупности с системой уравнений кинетики ядер эти два условия определяют скорость волны и  $\psi_f$  в зависимости от управляющих параметров системы.

**Введение**

Идея создания реактора на быстрых нейтронах, который может работать в течение долгого времени без непосредственного участия человека за счет прохождения волны медленного ядерного горения, была впервые выдвинута Л. П. Феокистовым [1]. Идея простая и красивая. Представим

себе цилиндр из чистого сырьевого материала, такого как  $^{238}\text{U}$  или  $^{232}\text{Th}$ , который облучается с торца нейтронами. В приповерхностной области цилиндра, определяемой длиной пробега нейтронов, сырьевой материал трансмутирует в делящийся материал в соответствии с хорошо известными цепочками преобразований:



Когда достигается критическая концентрация делящегося материала, начинается самоподдерживающаяся цепная реакция и нейтроны поступают в соседнюю область, где начинает накапливаться делящийся материал и т.д. Таким образом, медленная волна ядерных делений распространяется через сырьевой материал. Такая волна является саморегулирующейся, поскольку любое флуктуационное превышение концентрации над критической должно выгорать за времена, сравнимые с временем жизни нейтрона, а новый делящийся материал образуется через времена, сравнимые с временем  $\beta$ -распада предшественника и не одновременно.

Одно важное условие было установлено Феокистовым: критическая концентрация делящегося материала должна быть меньше, чем его равновесная концентрация (определяемая как асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  решение кинетического уравнения для концентрации делящегося элемента). Таким образом, в среде  $^{238}\text{U}$  при определенных условиях возможно распространение волны нейтронного деления, во фронте которой уран захватывает нейтроны и превращается в

плутоний. Это типичный автоволновой режим, который интенсивно исследуется в нелинейной физике. Впоследствии Е. Теллер [2] предложил быстрый реактор с ториевым циклом, который работает в режиме саморегулирования на глубине 100 м в течение 30 лет без участия человеческого фактора, т.е. фактически использовал идею Феокистова применительно к ториевому циклу.

В работах [3, 4] режим саморегулирования быстрых реакторов исследовался на основе системы дифференциальных уравнений, которая описывала цилиндрический реактор с внутренней критической зоной и внешним урановым blanketом, с помощью математического моделирования. Результаты показали, что ядерный реактор может работать в таком режиме в продолжение значительного времени без внешнего управления. Но стационарной волны авторы не наблюдали: вначале реактор медленно увеличивал мощность, а потом затухал раньше, чем образовывалась волна.

Стационарный режим волны медленного ядерного горения исследовался несколькими группами. В работах [5 - 7] проводилось числен-

ное моделирование для разных вариантов быстрых реакторов в многогрупповом диффузионном приближении с учетом пространственных и температурных эффектов. Авторы дали новое название автоволновому режиму – CANDLE (свеча). Авторы работ [8, 9] также при помощи численного моделирования показали, что в двухзонном гомогенном реакторе (плоская одномерная модель) с металлическим U-Pu топливом, натриевым теплоносителем и конструкционным материалом из железа можно создать волновой режим ядерного горения, который существует в течение длительного времени. В работе [10] было сделано предположение, что реактор такого типа может работать в недрах Земли на границе между твердым и жидким ядром. Были приведены физические обоснования и экспериментальные свидетельства существования такого реактора, а также на основе трехмерного численного моделирования проведены оценки мощности такого реактора.

По нашему мнению, численные расчеты такого типа не отражают физических особенностей волновых реакторов и, во всяком случае, не могут быть доказательством существования устойчивой волны. Это связано с тем, что в таких расчетах теряется основная идея саморегулирования волнового реактора. Действительно, флуктуационные излишки над критической концентрацией плутония выгорают за времена, сравнимые со временем жизни нейтронов (без учета запаздывающих нейтронов) или, по крайней мере, сравнимые с периодом реактора (с учетом запаздывающих нейтронов), а новый плутоний образуется только через трое суток (приблизительно) и то не одновременно. Это означает, что численные расчеты нужно проводить с временным шагом порядка  $10^{-6}$  -  $10^{-7}$  с без учета запаздывающих нейтронов или с шагом  $\sim 10^{-1}$  - 1 с при учете запаздывающих нейтронов. Большинство численных расчетов проводилось с временным шагом порядка суток (в работах, где указывался такой шаг), что связано с необходимостью расчета длительных по времени процессов установления волнового режима и распространения волны по всему реактору. Понятно, что полный расчет кампании реактора с указанными выше временными шагами практически недоступен даже для современных компьютеров (исключая суперкомпьютеры и международные компьютерные сети).

На первый взгляд, учет запаздывающих нейтронов не важен для формирования волны ядерного горения. Однако он становится очень важным для численных расчетов, поскольку добавление одного или нескольких уравнений в математическую модель не идет ни в какое сравнение

с необходимостью уменьшить шаг расчета на шесть-семь порядков. Расчет с шагом порядка суток приводит к кажущемуся увеличению коэффициента размножения до 1,1 – 1,2 в зависимости от шага расчета. При этом разгона реактора не происходит. Это и указывает на нефизичность таких расчетов. Кроме того, численные расчеты не позволяют проанализировать влияние каждого параметра системы на характеристики волны ядерного горения, тем более выделить управляющие параметры системы.

Аналитические исследования процесса установления волны ядерного горения базируются на упрощенных уравнениях с последующими численными оценками. В частности, в интересных работах [11, 12] (см. также работу [13], где на основе модели работ [11, 12] проводятся оценки боковых утечек) исследовалось образование и формирование автоволны в одномерной системе на основе одногруппового уравнения диффузии с нелинейной обратной связью по реактивности и модельной зависимостью коэффициента размножения от флюэнса. По мнению авторов, эта зависимость в неявном виде и приближенно учитывает кинетические уравнения выгорания, в частности наработку плутония. В результате получено стационарное решение в виде диффузионного солитона, а также численно исследован процесс формирования волны.

В своей предыдущей работе [14] мы исследовали свойства стационарной волны нейтронного деления в зависимости от параметров нейтронно-ядерной системы в близкой к предложенной Феокистовым модели. Мы показали, что описание системы упрощается в случаях волн большой и малой скорости. Критическую концентрацию плутония мы считали постоянной наперед заданной величиной, хотя в действительности она изменяется при прохождении волны. В данной работе мы отказались от этого приближения и учли другие нуклиды, которые образуются в результате прохождения волны. Введен также новый элемент модели – посторонний поглотитель. Его концентрация является реальным управляющим параметром системы. Изменяя ее, можно изменять скорость волны.

### **Волна ядерного горения в одномерном диффузионном приближении: уравнение для флюэнса**

Обычный реактор на быстрых нейтронах (РБН) и реактор на волне ядерного горения (РВЯГ) являются в своей основе системами взаимодействующих нейтронов и ядер. В реакторах обоих типов ядра сырьевого нуклида  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  могут захватывать нейтроны и превращаться в

ядра делящегося нуклида  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{233}\text{U}$  соответственно. Поэтому теория РБН и РВЯГ исходит из одних и тех же базовых уравнений. Это дифференциальные уравнения, которые учитывают цепочки превращения нуклидов, описывая изменение концентраций различных видов ядер со временем в определенной модели (так называемые уравнения выгорания), и уравнение кинетики нейтронов, которое, в частности, может учитывать их перенос в пространстве, миграцию по энергии и процессы взаимодействия с ядрами, сопровождающиеся изменением числа нейтронов.

Простейший подход использует одногрупповое приближение для распределения нейтронов по энергиям и диффузионное приближение для переноса в пространстве. Если учитываются лишь парные процессы взаимодействия “нейтрон - ядро”, то уравнение диффузии для концентрации нейтронов приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v \cdot D \cdot \Delta \phi + g \cdot \phi, \quad (1)$$

где  $\phi = v \cdot n$  – поток нейтронов;  $v$  – средняя скорость нейтронов;  $n$  – их концентрация;  $D$  – коэффициент диффузии;  $g$  – функция генерации нейтронов, которая является линейной функцией концентраций ядер  $N_i$ . По своей природе это балансное уравнение, базирующееся на подсчете изменения числа нейтронов в элементарном объеме за счет диффузии, поглощения ядрами и высвобождения нейтронов при делении ядер. Запоздавающие нейтроны мы не учитываем как несущественные в контексте вопросов, которые подлежат рассмотрению.

Специфика той или иной модели системы определяется степенью детализации модели кинетики ядер, от чего зависит и конкретный вид функции генерации нейтронов  $g(N_i)$ . Сначала мы остановимся на общих следствиях, которые вытекают из уравнения (1) для реакторов обоих типов независимо от модели, а потом покажем, как влияет на результаты специфика той или иной модели.

Заметим, что как для РВЯГ, так и для РБН следует различать стационарные и нестационарные режимы. Аналогом стационарного рабочего режима РБН для РВЯГ является режим стационарной волны, в то время как запуск РВЯГ и установление стационарной волны – процессы существенно нестационарные. Покажем, что для описания как стационарных, так и нестационарных процессов в РВЯГ можно использовать уравнение диффузии для флюэнса. Это открывает новые возможности для аналитического исследования системы.

Введем поле флюэнса как интеграл по времени от поля плотности потока нейтронов

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{t_0}^t \phi(\vec{r}, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $t_0$  — начальный момент времени. Выражение (2) эквивалентно следующему уравнению с нулевым начальным условием:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \phi(\vec{r}, t), \quad \psi(\vec{r}, t_0) = 0. \quad (3)$$

Включим для общности в правую часть уравнения (1) также слагаемое  $s(\vec{r}, t)$ , что отвечает заданному внешнему источнику нейтронов. Тогда, интегрируя уравнение (1) по времени от начального момента до текущего, получим уравнение для флюэнса, которое также имеет вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v \cdot D \cdot \Delta \psi + G + S(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Здесь  $S$  – источник флюэнса, который зависит также от начального значения потока нейтронов

$$S = \int_{t_0}^t s(\vec{r}, \tau) d\tau + \phi(\vec{r}, t_0), \quad (5)$$

а  $G$  назовем функцией генерации флюэнса

$$G = \int_0^\psi g(\vec{N}) d\psi. \quad (6)$$

Значение функции генерации флюэнса пропорционально полному числу нейтронов, которые генерируются (поглощаются) в данном элементарном объеме за все время процесса от  $t_0$  до  $t$ . Выражение (6) следует понимать как интеграл вдоль траектории системы в пространстве переменных  $(\vec{N}, \psi)$  для данной точки пространства. Для РВЯГ такая траектория полностью определяется уравнениями кинетики ядер с начальными условиями к ним, если зависимость  $\psi$  от времени в данной точке является заданной. При этом

$$\frac{\partial G}{\partial t} = g \cdot \phi. \quad (7)$$

Как показано в следующих разделах, в силу уравнений кинетики ядер приращение числа нейтронов можно выразить через приращения количества ядер, принимающих участие либо образующихся в соответствующих процессах.

Таким образом, при заданных начальных концентрациях ядер  $G$  является функцией лишь их конечных концентраций и, возможно, флюэнса и не зависит от траектории перехода из начального положения в конечное:

$$G = G(\vec{N}_0, \vec{N}, \psi). \quad (8)$$

Именно это обстоятельство придает уравнению (4) неформальное содержание и обуславливает возможность его использования для изучения нестационарных процессов в РВЯГ.

**Постановка и общие свойства задачи на стационарную волну**

Поскольку стационарный режим РВЯГ является его рабочим режимом, то целесообразно вначале рассмотреть общие условия существования стационарного режима, хотя условия инициации и становления автоволнового режима также очень важны. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих работах.

Так как изучение влияния ограниченности системы, как в поперечном, так и в продольном направлениях, является отдельной задачей, то ограничимся одномерной моделью РВЯГ на неограниченной прямой. Пусть внешнего источника нет,  $s = 0$ . Считаем, что волна приходит из бесконечности, распространяясь вдоль оси  $Ox$  справа налево. Начальным моментом является  $t_0 = -\infty$ , поэтому в начальный момент в любой конечной точке нейтронов нет. Тогда РВЯГ описывается системой уравнений, которая включает уравнение (6) при  $S = 0$  и уравнения кинетики ядер следующего общего вида:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v \cdot D \cdot \Delta \psi + G(\vec{N}_0, \vec{N}, \psi), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \hat{\sigma} \cdot \vec{N} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{\lambda} \cdot \vec{N}. \quad (10)$$

Тут  $\hat{\sigma}$  - матрица, элементами которой являются микроскопические сечения поглощения и захвата, а  $\hat{\lambda}$  - матрица, элементами которой являются константы радиоактивного распада  $\beta$ -активных нуклидов.

Для стационарной волны скорости  $u$  все поля являются функциями одной переменной, волновой переменной  $x + ut$ , которая пробегает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Пусть  $T$  - характерное время прохождения волны, а  $L$  - ее характерный пространственный размер. Безразмерную волновую переменную определим как

$$z = \frac{x}{L} + \frac{t}{T}. \quad (11)$$

Величину  $L$  мы определим позже, а  $T$  будем считать свободным параметром, который определяет скорость волны

$$u = \frac{L}{T}. \quad (12)$$

Итак, зависимости всех полей от безразмерной координаты  $\frac{x}{L}$  и безразмерного времени  $\frac{t}{T}$  являются фактически одинаковыми и совпадают с зависимостью от волновой переменной  $z$ .

Для стационарной волны система в частных производных (9) - (10) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений по безразмерной волновой переменной  $z$ .

Процессы при прохождении волны ядерного горения характеризуются несколькими различными временными масштабами. Одним из них, помимо  $T$ , является характерное время жизни нейтрона  $\tau$ , определенным образом связанное с видом функции  $g$ . Точно определить его можно будет для конкретной модели, а пока, до конкретизации модели, будем называть  $\tau$  условным временем жизни нейтронов. Важно лишь то, что  $g \cdot \tau$  является величиной порядка единицы, а потому  $G \cdot \tau \sim \psi$ . Кроме того, известно, что  $\tau \sim 10^{-6} - 10^{-7}$  с, а  $T$  изменяется от дней до месяцев в зависимости от мощности реактора, т.е.  $\varepsilon = \tau/T \ll 10^{-7}$  - чрезвычайно малый параметр. Еще один временной масштаб определяется временем  $\beta$ -распада промежуточного нуклида  $\tau_\beta$ , которое может быть сравнимо по порядку величины с  $T$ , но реально всегда  $\tau_\beta < T$ .

Для того, чтобы записать уравнения в безразмерной форме, определим следующие величины таким образом:

$$\hat{\sigma}' = \frac{\sigma}{\sigma_1}, \quad \psi' = \sigma_1 \cdot \psi, \quad g' = \tau \cdot g,$$

$$G' = \sigma_1 \cdot \tau \cdot G, \quad \vec{N}' = \frac{\vec{N}}{N_{10}}, \quad (13)$$

где безразмерные величины обозначены штрихами,  $\sigma_1$  - один из элементов матрицы сечений  $\hat{\sigma}$ , а именно сечение поглощения сырьевого нуклида  $N_1$ ,  $N_{10}$  - отличная от нуля начальная концентрация сырьевого нуклида. В дальнейшем штрихи опускаем, сохраняя за безразмерными величинами те же обозначения, что и для соответствующих размерных величин. Величины  $\hat{\lambda}$  и  $T$  остаются размерными, однако произведение  $T \cdot \hat{\lambda}$  является безразмерным.

Допуская, что существует решение системы

(9) - (10) в виде стационарной волны, умножим уравнение (9) на  $\tau$  и получим

$$\varepsilon \cdot \dot{\psi} = v \cdot \frac{D \cdot \tau}{L^2} \ddot{\psi} + G(\bar{N}, \psi), \quad (14)$$

$$\dot{\bar{N}} = \dot{\psi} \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{N} + T \cdot \hat{\lambda} \cdot \bar{N}, \quad (15)$$

где точками обозначены производные по  $z$ . В силу малости  $\varepsilon$  с большой точностью членом  $\varepsilon \cdot \dot{\psi}$  в (14) можно пренебречь (процесс диффузии нейтронов фактически является стационарным). По смыслу величин  $L$  и  $T$  изменение, например, концентрации нейтронов в области существования волны на длине  $L$  или за время  $T$  является величиной порядка самой концентрации. То же касается и флюэнса, а значит,  $\ddot{\psi} \sim \dot{\psi} \sim \psi \sim \tau \cdot G$ . Тогда из формулы (14) видно, что следует положить

$$L^2 = v \cdot D \cdot \tau, \quad (16)$$

т.е.  $L$  – длина диффузионного смещения за условное время жизни  $\tau$ .

В результате уравнения (14) и (15) приобретают вид

$$\ddot{\psi} = -G(\bar{N}, \psi), \quad (17)$$

$$\dot{\bar{N}} = \dot{\psi} \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{N} + T \cdot \hat{\lambda} \cdot \bar{N}. \quad (18)$$

Стационарная волна является решением системы (17) - (18) при всех  $z \in (-\infty, \infty)$ . Это решение удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, т.е. является частным решением некоторой задачи для уравнений (17) и (18). Как будет видно из дальнейшего, она является нелинейной сингулярной краевой задачей на собственные значения. Так как правильная математическая постановка ее заранее не очевидна, будем исходить из физических соображений.

Стационарная волна горения представляет собой переход системы из одного стационарного однородного состояния в другое. Это переход из начального состояния “топлива”

$$N_i(x, t_0) = N_{i0}, n(x, t_0) = 0, \psi = 0, \quad (19)$$

которое полностью задано, в конечное состояние “пепла”

$$N_i(x, t_f) = N_{if}, n(x, t_f) = 0, \psi = \psi_f, \quad (20)$$

параметры которого подлежат определению в процессе решения задачи. Оба состояния являются стационарными решениями как системы (9) - (10) в переменных  $x, t$ , так и системы (17) - (18) относительно волновой переменной  $z$ .

Конечно, для всех нестабильных ядер должно быть  $N_{i0} = N_{if} = 0$ , так как и начальное, и конечное состояния являются стационарными. Реально это ограничение касается только ядер с относительно коротким временем  $\beta$ -распада,  $\tau_{\beta i} \leq T$ . Кроме того, оба состояния, очевидно, являются подкритическими, поэтому  $g(\bar{N}_0) < 0$  и  $g(\bar{N}_f) < 0$ .

Для системы уравнений (17) - (18) начальное и конечное состояния являются стационарными точками, к которым должно стремиться состояние системы при  $z \rightarrow -\infty$  и при  $z \rightarrow +\infty$  соответственно. Линеаризация уравнения (17) относительно малых отклонений от стационарных значений (19) или (20) приводит к линейному уравнению стационарной диффузии вида

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\psi} = 0, \quad (21)$$

которое имеет два экспоненциальных частных решения  $\tilde{\psi} = e^{\pm \alpha \cdot z}$ . Здесь  $\tilde{\psi} = \psi$ ,  $\alpha = \alpha_0$  для начального состояния и  $\tilde{\psi} = \psi_f - \psi$ ,  $\alpha = \alpha_f$  для конечного состояния, причем постоянные определяются концентрациями ядер в “топливе” и “пепле”

$$\alpha_0^2 = -g(\bar{N}_0), \quad \alpha_f^2 = -g(\bar{N}_f). \quad (22)$$

Передний и задний фронты волны, очевидно, описываются экспоненциально спадающими функциями при  $z \rightarrow -\infty$  и  $z \rightarrow +\infty$  соответственно:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= A \cdot e^{\alpha_0 \cdot z} = A \cdot e^{\frac{x+u-t}{L_0}}, \\ \psi_f - \psi(z) &= B \cdot e^{-\alpha_f \cdot z} = B \cdot e^{-\frac{x+u-t}{L_f}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $L_0 = L/\alpha_0$  и  $L_f = L/\alpha_f$ .

Таким образом, решение уравнения (17), которое соответствует стационарной волне, удовлетворяет следующим условиям:

$$z \rightarrow -\infty : N_i \rightarrow N_{i0}, \psi \rightarrow 0, \dot{\psi} \rightarrow 0, \ddot{\psi} \rightarrow 0, \dots; \quad (24)$$

$$z \rightarrow +\infty : N_i \rightarrow N_{if}, \psi \rightarrow \psi_f, \dot{\psi} \rightarrow 0, \ddot{\psi} \rightarrow 0, \dots \quad (25)$$

Среди них независимыми условиями, которые не содержат неизвестных величин, являются следующие:

$$z \rightarrow -\infty : N_i \rightarrow N_{i0}, \psi \rightarrow 0, \quad (26)$$

$$z \rightarrow +\infty : \dot{\psi} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Постановка задачи для уравнений (17) - (18) включает в себя граничные условия (26) - (27), а также условие неотрицательности плотности потока нейтронов

$$\dot{\psi} \geq 0. \quad (28)$$

Казалось бы, число условий равно порядку системы (17) - (18): для каждого  $N_i$  существует уравнение первого порядка с начальными условиями и два условия к уравнению (17) второго порядка. Однако легко видеть, что задача (17) - (18), (26) - (28) не изменяется при замене  $z \rightarrow z - C$ , что вполне естественно: положение искомой волны по волновой координате является произвольным, а число произвольных постоянных на одну меньше, чем число условий (26) - (28). Таким образом, как и должно быть в задаче на собственные значения, одно из условий (26) - (28) "лишнее". Заметим, что задача (17) - (18), (26) - (28) всегда имеет решение, которое соответствует пребыванию системы в начальном состоянии (19). Такое решение можно считать тривиальным. При этом состояния (19) и (20) совпадают. Нетривиальное решение существует, если удовлетворить всем условиям задачи за счет свободного параметра, который называется спектральным параметром задачи. Таковым в данном случае является параметр  $T$ . Через собственное значение  $T$  по формуле (12) выражается скорость волны. А интегрируя систему (17) - (18) при известном  $T$ , находим распределение полей стационарной волны.

Таким образом, в данной системе, при конкретных значениях материальных параметров, скорость стационарной волны, если такая волна существует, имеет вполне определенное значение.

Однако задача теории при изучении данной модели РВЯГ вовсе не сводится только к вычислению скорости и других характеристик волны и констатации некоторых числовых значений.

РВЯГ как физическая система и соответствующая модель могут характеризоваться рядом материальных параметров, которые в принципе могут быть изменены на практике. Такие независимые параметры называют управляющими параметрами системы. Собственное значение задачи, а значит, и скорость волны являются функциями управляющих параметров. Кроме того, в нелинейной задаче собственных значений может не быть совсем или их может быть несколько. Тогда возможна ситуация, когда в нестационарном случае решение при  $t \rightarrow \infty$  будет выходить на разные стационарные режимы в зависимости от начальных условий.

Практически важная задача теории, таким об-

разом, состоит в изучении спектра собственных значений и характеристик соответствующих волн в зависимости от положения точки в пространстве управляющих параметров системы и обеспечении на этой основе оптимальных или наперед заданных характеристик РВЯГ.

Заметим, что решение задачи для стационарной волны только тогда имеет физический смысл, если оно является устойчивым решением нестационарной системы (9) - (10). Исследование этого вопроса выходит за пределы данной работы.

### Общие условия стационарности волны

Краева задача (17) - (18), (26) - (28) не может быть решена в общем виде, однако можно найти некоторые общие условия, определяющие стационарную волну. По отношению к уравнениям (17) и (18) конфигурационным пространством системы является пространство переменных  $(N_i, \psi)$ , а фазовым - пространство переменных  $(N_i, \psi, \dot{\psi})$ . При переходе системы от начального состояния к конечному флюэнс  $\psi$  монотонно изменяется с координатой  $z$  от нуля до  $\psi_f$ ,  $0 \leq \psi \leq \psi_f$ . Поэтому можно считать, что на фазовой траектории  $\vec{N}$  и  $\dot{\psi}$  являются функциями  $\psi$ . Домножим уравнение (17) на  $\dot{\psi}$  и проинтегрируем от начального состояния (26) до текущего. Учитывая, что в начальном состоянии в силу условий (24)  $\dot{\psi} = 0$ , для текущего состояния получим

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + M(\vec{N}, \psi) = 0, \quad (29)$$

$$M(\vec{N}, \psi) = \int_0^\psi G(\vec{N}, \psi) d\psi. \quad (30)$$

Итак, чтобы при  $z \rightarrow \infty$  в конечном состоянии  $\psi = \psi_f$ ,  $\vec{N} = \vec{N}_f$  выполнялось граничное условие  $\dot{\psi} = 0$  (27) и условие  $\ddot{\psi} = 0$  (25), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

$$G(\vec{N}_f, \psi_f) = 0, \quad (31)$$

$$M(\vec{N}_f, \psi_f) = 0, \quad (32)$$

где интегралы (6) и (30) берутся вдоль траектории системы  $\vec{N} = \vec{N}(z)$ ,  $\psi = \psi(z)$ . Это и есть общие условия, которые определяют стационарную волну.

Условия (31) и (32), при заданных материальных параметрах системы, определяют два параметра волны: скорость  $W$  (или параметр  $T$ ) и конечный флюэнс  $\psi_f$ . При таких значениях решение системы (17) - (18), соответствующее заданному состоянию перед фронтом волны (условие (26) при  $z \rightarrow -\infty$ ), удовлетворяет условиям (27) и (28), т.е. удовлетворяет всем условиям задачи и, таким образом, соответствует стационарной волне.

Парадокс же заключается в том, что при  $z \rightarrow +\infty$  выполнение условия  $\ddot{\psi} = 0$  является следствием условия  $\dot{\psi} = 0$  (27), о чем уже говорилось, однако следующие из них условия (31) и (32) действительно являются независимыми, причем именно два условия и необходимы. Математически разрешение парадокса связано с тем, что в уравнении (29)  $\dot{\psi}$  рассматривается уже как функция  $\psi$ , а не  $z$ , поэтому информация о том, что  $z$  изменяется в бесконечных пределах, теряется.

Наглядно ситуацию можно пояснить так. Уравнение (17) имеет форму уравнения Ньютона для движения частицы единичной массы по координате  $\psi$  и во времени  $z$  под действием некоторой силы  $F = -G$ . Поэтому задачу будем интерпретировать как задачу механики. За время от  $z = -\infty$  до  $z = +\infty$  частица совершает конечное перемещение из начального положения  $\psi = 0$  в положение  $\psi = \psi_f$ , причем скорость частицы знака не меняет (условие (28)). Время движения является бесконечным, а перемещение – конечным. Следовательно, как в пределе  $z \rightarrow -\infty$ , так и  $z \rightarrow +\infty$ , скорость стремится к нулю. Другими словами, частица останавливается. Отсюда следует условие (32): работа “силы”  $G$  на перемещении  $0 \rightarrow \psi_f$  равна нулю (так как кинетическая энергия не изменяется).

В свою очередь и разгон, и торможение частицы происходят за бесконечное время, поэтому в ноль обращается также и ускорение. Тогда и начальное, и конечное положения – суть положения равновесия, в которых “сила”  $G$  обращается в ноль. Отсюда следует условие (31), а в начальном положении  $G = 0$  по определению (6).

Оба указанных условия, очевидно, являются независимыми. Если хотя бы одно из них не выполняется, решение не удовлетворяет условиям (27) и (28) и не имеет физического смысла. Это подтверждают приведенные на рис. 1 примеры фазовых траекторий, рассчитанные в одной из моделей для трех значений управляющего параметра при фиксированной скорости волны. Начальное состояние для всех кривых соответствует началу координат. Участок кривой 2 между двумя нулями  $\dot{\psi}$  соответствует стационарной волне. Для нижней кривой 3  $\dot{\psi}$  проходит через

ноль, но  $\ddot{\psi}$  при этом в ноль не обращается. Для верхней кривой 1, напротив, в минимуме  $\dot{\psi} = 0$ , а  $\ddot{\psi}$  в ноль не обращается. Соответствующие кривым 1 и 3 решения не имеют физического смысла: в первом случае  $\dot{\psi}$  меняет знак, причем происходит это при некотором конечном  $z$ , а во втором –  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  неограниченно возрастают. Отметим, что в механике имели бы смысл все приведенные траектории. Однако в стационарной диффузии имеет смысл только краевая задача, а не задача Коши, как в механике, и в этом состоит ограниченность приведенной выше механической аналогии.

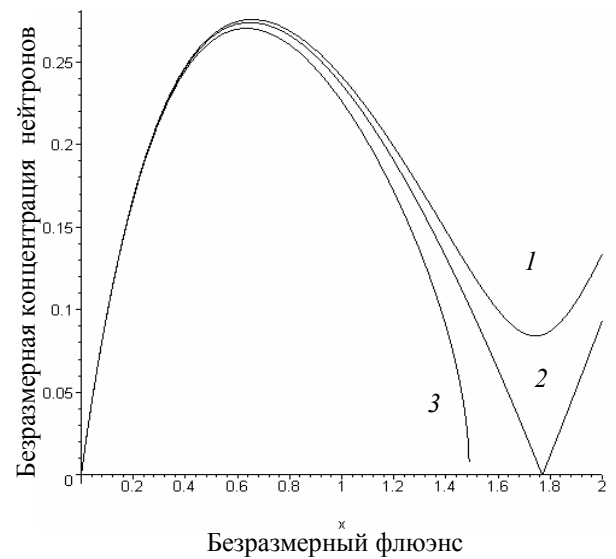


Рис. 1. Фазовые траектории в плоскости  $(\psi, \dot{\psi})$  для разных значений управляющего параметра в пределе  $W \rightarrow 0$ . Участок кривой 2 между двумя точками, в которых концентрация нейтронов обращается в ноль, соответствует стационарной волне.

В общем случае условия (31) и (32) представляют собой некие условия равновесия, которые обеспечивают стационарность волны. Они имеют интегральный пространственно-временной характер и являются аналогами условия критичности РБН  $g = 0$ . Существенное же отличие от РБН состоит в том, что для РВЯГ таких условий два, а не одно.

Что касается конкретного содержания этих условий в терминах стационарной диффузии, то для условия (31) оно очевидно: полное производство нейтронов при прохождении волны (как по времени в каждой точке  $x$ , так и по координате в произвольный момент времени  $t$ ) должно равняться нулю. Это интегральное условие равенства генерации и поглощения нейтронов по всей волне. Что касается условия (32), то очевидным является лишь его геометрический

смысл: площадь под кривой  $G(\psi)$  вдоль траектории должна равняться нулю (имеется в виду, что площадь под кривой положительна на участке, где функция  $G(\psi) > 0$ , и отрицательна там, где  $G(\psi) < 0$  (рис. 2). Видно только, что условие (32) связано с распределением производства нейтронов по координате флюэнса.

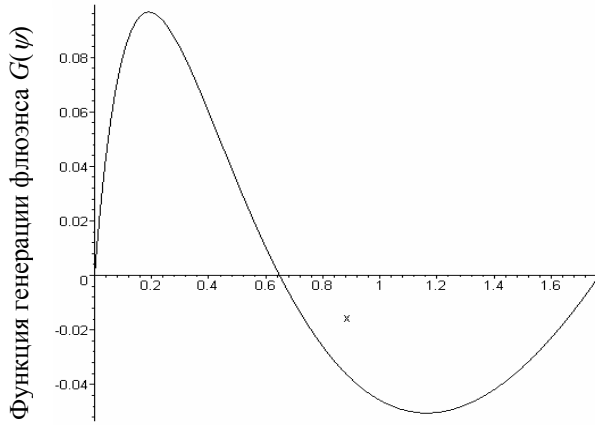


Рис. 2. Зависимость функции генерации флюэнса от безразмерного флюэнса.

Запишем условия стационарности волны через функцию генерации нейтронов  $g$ . Подставим формулу (6) в (31) и (32) и изменим порядок интегрирования в полученном двойном интеграле. Тогда условия (31) и (32), соответственно, принимают вид

$$\int_0^{\psi_f} g d\psi = 0, \tag{33}$$

$$\int_0^{\psi_f} (\psi_f - \psi) \cdot g d\psi = 0, \tag{34}$$

где  $g$  понимается как функция флюэнса вдоль траектории системы. Полученные условия по форме в точности совпадают с условиями статического равновесия рычага под действием перпендикулярной рычагу распределенной силы  $g(\psi)$ , которая действует на отрезке  $0 \leq \psi \leq \psi_f$  ( $\psi$  – координата вдоль рычага): (33) и (34) являются условиями равенства нулю суммы сил и суммы моментов сил соответственно. Поэтому если первое условие – это интегральное условие равенства генерации и поглощения, то второе можно назвать интегральным условием равенства “моментов” генерации и поглощения нейтронов. В (34) такой момент посчитан относительно точки  $\psi = \psi_f$ . Конечно, при выполнении условия (33) момент можно считать относительно произвольной точки. Далее функцию  $M$  будем называть моментом генерации нейтронов.

Условиям (33) и (34) можно придать форму,

подобную условию критичности РБН  $k = 1$ , где  $k$  – коэффициент размножения нейтронов. Для этого функции генерации нейтронов  $g$  и флюэнса  $G$  разделим на две части:

$$g = g^+ - g^-,$$

$$G^\pm = \int_0^{\psi_f} g^\pm d\psi = \bar{g}^\pm \cdot \psi_f, \tag{35}$$

так что  $\bar{g}^+$  и  $\bar{g}^-$  – положительные (черта сверху означает среднее значение), т.е.  $g^+$  отвечает за генерацию нейтронов, а  $g^-$  – за поглощение. Если в  $g^+$  включена только генерация, а в  $g^-$  – все каналы поглощения, то для РБН коэффициент размножения нейтронов имеет вид

$$k = \frac{\bar{g}^+}{\bar{g}^-}. \tag{36}$$

Назовем “центрами приложения” генерации и поглощения точки на оси флюэнса с координатами

$$\bar{\psi}^\pm = \frac{\int_0^{\psi_f} \psi \cdot g^\pm d\psi}{\int_0^{\psi_f} g^\pm d\psi}. \tag{37}$$

Введем теперь для РВЯГ интегральный коэффициент размножения нейтронов

$$k^0 = \frac{\bar{g}^+}{\bar{g}^-} \tag{38}$$

и интегральный коэффициент пространственного равновесия

$$k^1 = \frac{\bar{\psi}^+}{\bar{\psi}^-}. \tag{39}$$

Тогда условия стационарности волны (37) и (38) можно записать как:

$$k^0 = k^1 = 1. \tag{40}$$

Преимущество именно таких коэффициентов  $k^0$  и  $k^1$  в том, что они по-разному реагируют на изменение распределений  $g^+$  и  $g^-$ . При увеличении, например,  $g^+$  в  $K$  раз  $k^0$  изменится, а  $k^1$  – нет. Поэтому для  $k^0$  важна прежде всего абсолютная величина, амплитуда, а для  $k^1$  – пространственное распределение  $g^+$  и  $g^-$  по флюэнсу.

Заметим, что оба коэффициента являются



функциями времени прохождения волны  $T$  (или скорости  $u = \frac{L}{T}$ ), максимального флюэнса  $\psi_f$  и управляющих параметров системы  $q_s$ , а два условия (40) неявно определяют зависимости  $T = T(q_s)$  и  $\psi_f = \psi_f(q_s)$ .

Суммируя полученные результаты, можно сделать следующий качественный вывод: для стационарности волны горения, кроме интегрального равенства количества нейтронов, которые генерируются и поглощаются, имеют значение распределения плотности генерации и поглощения по координате флюэнса. Соответствующее условие пространственно-временной сбалансированности в волне может быть записано в виде условия совпадения центров приложения генерации и поглощения по координате флюэнса  $\bar{\psi}^+ = \bar{\psi}^-$ , или  $k^1 = 1$ . Таким образом, стационарная волна ядерного горения должна быть сбалансирована не по одному, а по двум

параметрам одновременно, что имеет принципиальное значение для понимания физики этого процесса.

Важность коэффициента размножения нейтронов  $k$  в теории реакторов состоит в том, что через  $k$  выражается реактивность, которая играет ключевую роль в нестационарных задачах динамики нейтронов. Нестационарные процессы в РВЯГ мы здесь не рассматриваем, поэтому роль коэффициентов  $k^0$  и  $k^1$  для таких процессов здесь не обсуждается.

В следующей статье при помощи полученных условий стационарности волны будет исследован РВЯГ с поглотителем. При этом для актуального случая волны малой скорости может быть предложена итерационная процедура. Также будут рассмотрены конкретные модели РВЯГ с анализом влияния различных нуклидов на условия распространения и свойства волны ядерного горения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феоктистов Л.П.* Нейтронно-делительная волна // Докл. Акад. наук СССР. - 1989. - Т. 309. - С. 864 - 867; *Феоктистов Л.П.* Безопасность - ключевой момент возрождения ядерной энергетики // Успехи физ. наук. - 1993. - № 8. - С. 89 - 102.
2. *Teller E.* Nuclear energy for the third millennium // Preprint / UCRL-JC-129547, LLNL. - 1997.
3. *Гольдин В.Я., Анистратов Д.Ю.* Реактор на быстрых нейтронах в саморегулируемом нейтронно-ядерном режиме // Мат. моделирование. - 1995. - Т. 7, № 10. - С. 12 - 32.
4. *Гольдин В. Я., Пестрякова Г.А. Троцкий Ю.В., Аристова Е.Н.* Быстрый реактор на оксидном уран-плутониевом топливе в саморегулируемом режиме // Атомная энергия. - 2003. - Т. 94, вып. 3. - С. 184 - 190.
5. *Sekimoto H. et al.* A new burnup strategy CANDLE // Nucl. Sci. Eng. - 2001. - Vol. 139. - P. 306 - 317.
6. *Sekimoto H., Tanaka K.* Application of CANDLE Burnup Strategy to Small Reactors // Trans. Am. Nucl. Soc. - 2002. - Vol. 87. - P. 399 - 400.
7. *Sekimoto H., Ohoka Y.* Application of Candle Burnup to Block-Fuel High Temperature Gas Reactor // Proc. of ICAAP'03, Cordoba, May 4 - 7. - 2003. - CD. Paper 3013.
8. *Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F.* Investigation of Self-Organization of the Non-Linear Nuclear Burning Regime in Fast Neutron Reactors // Annals of Nuclear Energy. - 2005. - Vol. 32. - P. 1435 - 1456.
9. *Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F.* Study of self-organizing regime of nuclear burning wave in fast reactor // Problems of Atomic Science and Technology. - 2005. - No. 6, Series: Nuclear Physics Invest. (45). - P. 106 - 113.
10. *Rusov V. D., Pavlovich V. N., Vaschenko V. N. et al.* Geoantineutrino spectrum and slow nuclear burning on the boundary of the liquid and solid phases of the Earth's core // Journal of geophysical research. - 2007. - Vol. 112. - B09203, doi: 10.1029/2005JB004212.
11. *Van Dam H.* Self-stabilizing criticality waves // Annals of Nuclear Energy. - 2000. - Vol. 27. - P. 1505 - 1521.
12. *Van Dam H.* Flux distributions in stable criticality waves // Annals of Nuclear Energy. - 2003. - Vol. 30. - P. 1495 - 1504.
13. *Xue-Nong Chen, Werner Maschek.* Transverse buckling effects on solitary burn-up waves // Annals of Nuclear Energy. - 2005. - Vol. 32, No. 12. - P. 1377 - 1390.
14. *Павлович В. Н., Хотяйцева Е. Н., Русов В. Д. и др.* Реактор на медленной волне ядерного горения // Атомная энергия. - 2007. - Т. 102, № 3. - С. 151 - 158.

#### ФІЗИЧНІ ОСНОВИ РЕАКТОРА НА ХВИЛІ ЯДЕРНОГО ГОРІННЯ. I

**В. М. Павлович, В. М. Хотяйцев, О. М. Хотяйцева**

Прояснення фізики процесів, що визначають стаціонарну хвилю ядерного горіння, та знаходження ефективних теоретичних підходів для визначення її параметрів є метою даної роботи. Показано, що для описання стаціонарних і нестационарних процесів у хвилі ядерного горіння можна використовувати рівняння дифузії для флюенсу, а еволюцію системи при проходженні стаціонарної хвилі зручно представляти як рух по координаті флюенсу  $\psi$  від нульового початкового до деякого кінцевого значення  $\psi_f$ . Уперше сформульовано загальні баланси

умови інтегрального характеру, що визначають стаціонарну хвилю як самоузгоджений просторово-часовий процес. Таких умов дві. Перша є умовою рівності повного числа нейтронів, що генеруються й поглинаються при проходженні хвилі, а друга – умовою збігу “центрів ваги” розподілів генерації та поглинання нейтронів уздовж координати флюенсу. У сукупності із системою рівнянь кінетики ядер ці дві умови визначають швидкість хвилі та  $\psi_f$  залежно від керуючих параметрів системи.

## PHYSICAL PRINCIPLES OF THE NUCLEAR BURNING WAVE REACTOR. I

V. M. Pavlovych, V. M. Khotyayintsev, O. M. Khotyayintseva

This paper aims to make clear the physics of the processes determining the stationary wave of the nuclear burning, and also to find the effective theoretical approaches for determining of its parameters. It is shown that the diffusion equation for fluense may be used both for the stationary and unstationary processes in the nuclear burning wave. Also, the system evolution corresponding to the stationary wave passing it is useful to present as a motion along the co-ordinate of fluense  $\psi$  from the initial zero value to some final value  $\psi_f$ . General balance conditions of the integral type determining stationary wave as a self-consistent time and spatial process are formulated firstly. There are two such conditions. The first one is the condition of equality of the total numbers of neutrons generated and absorbed at the wave passing. The second one is the coincidence condition of “the centers of weight” of the neutron generation and absorption distributions along the co-ordinate of fluense. Together with nuclei kinetic equations these two conditions determine the velocity of the wave and  $\psi_f$  as the functions of control parameters of the system.

Поступила в редакцію 02.06.08,  
после доработки – 29.07.08.